**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ**
**ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ**
**ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ**

**ΕΙΔΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΜΙΚΡΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ**

***Διδάσκων: Αθανάσιος Λαπατίνας***

## Ασκήσεις Ι

*(Σημείωση: Ο αριθμός των αστερίσκων υποδηλώνει το βαθμό δυσκολίας κάθε άσκησης)*

1.(*) Show that if $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ is strictly increasing function and $u:X\to\mathbb{R}$ is a utility function representing preference relation $\succsim$, then the function $v:X\to\mathbb{R}$ defined by $v(x)=f(u(x))$ is also a utility function representing preference relation $\succsim$.

2.(*) Draw a convex preference relation that is locally nonsatiated but is not monotone.

3.(*) Consider the Walrasian budget set $B_{p,w}=\{x\in X: px\le w,\}$ $(p,w)\gg 0$. Show that if $X$ is a convex set, then $B_{p,w}$ is as well.

4.(*) Θεωρείστε ένα καταναλωτή ο οποίος καταναλώνει δύο αγαθά, 1 και 2. Οταν οι τιμές τους είναι $p=(2,4)$ τότε η ζήτησή του είναι $x=(1,2)$. Οταν οι τιμές τους είναι $p=(6,3)$ τότε ζητάει $x=(2,1)$. Αυτός ο καταναλωτής μεγιστοποιεί την ωφέλεια του;

5.(*) Θεωρήσατε τη συνάρτηση χρησιμότητας Cobb-Douglas

$$u(x_1,x_2)=x_1^{\alpha}\,x_2^{1-\alpha},\qquad 0<\alpha<1$$

Βρείτε τις Μαρσαλιανές συναρτήσεις ζήτησης, την έμμεση συνάρτηση χρησιμότητας, τη συνάρτηση δαπανών, τις Χικσιανές συναρτήσεις ζήτησης, τη χρηματικά μετρήσιμη συνάρτηση χρησιμότητας. Ακολούθως δείξτε ότι οι παραπάνω συναρτήσεις ικανοποιούν τις γνωστές τους ιδιότητες καθώς και ότι η ταυτότητα του Roy ικανοποιείται.

Επίσης δείξτε ότι ικανοποιείται η εξίσωση του Slutsky, κατασκευάστε τη μήτρα Slutsky και δείξτε ότι είναι συμμετρική και αρνητικά ημι-ορισμένη. Τέλος δείξτε ότι ικανοποιούνται οι τέσσερις βασικές ταυτότητες που πηγάζουν από το δυϊσμό των προβλημάτων μεγιστοποίησης χρησιμότητας και ελαχιστοποίησης εξόδων.

6.(**) Suppose the utility function known as the *constant elasticity of substitution* (CES) utility function:

$$u(x) = [a_1 x_1^{\rho} + a_2 x_2^{\rho}]^{\frac{1}{\rho}}$$

a) Show that when $\rho = 1$, indifference curves become linear.
b) Show that as $\rho \to 0$, the utility function comes to represent the same preferences as the Cobb-Douglas utility function $u(x) = x_1^{a_1} x_2^{a_2}$.
c) Show that as $\rho \to -\infty$, indifference curves become "right angles", that is, this utility function has in the limit the indifference map of the Leontief utility function $u(x) = \min\{x_1, x_2\}$.

7.(**) Consider again the CES utility function:

$$u(x) = [x_1^{\rho} + x_2^{\rho}]^{\frac{1}{\rho}} \qquad 0 \neq \rho < 1$$

a) Compute the Walrasian demand and the indirect utility functions.
b) Verify that these functions satisfy all their properties.
c) Derive the Walrasian demand correspondence and indirect utility function for the case of linear and Leontief utility. Show that the CES Walrasian demand and indirect utility functions approach these as $\rho \to 1$ and $\rho \to -\infty$ respectively.
d) The elasticity of substitution between goods 1 and 2 is defined as:

$$\xi_{1,2}(p,w) = -\frac{\partial\left[x_1(p,w)/x_2(p,w)\right]}{\partial\left[p_1/p_2\right]} \frac{p_1/p_2}{x_1(p,w)/x_2(p,w)}$$

show that for the CES utility function $\xi_{1,2} = \dfrac{1}{1-\rho}$, thus justifying its name. What is $\xi_{1,2}(p,w)$ for the linear, Leontief and Cobb-Douglas utility functions?
e) Derive for the CES utility function the Hicksian demand function and the expenditure function. Verify their properties.

8.(*) Consider the utility function:

$$u(x_1, x_2) = 2x_1^{1/2} + 4x_2^{1/2}$$

a) Find the demand function for goods 1 and 2.
b) Find the compensated demand function $h(p,u)$.
c) Find the expenditure function, and verify that $h(p,u) = \nabla_p e(p,u)$.
d) Find the indirect utility function and verify Roy's identity.

9.(*) Consider the 3-good setting in which consumer has utility function:

$$u(x) = (x_1 - b_1)^a (x_2 - b_2)^\beta (x_3 - b_3)^\gamma$$

Assume that $a + \beta + \gamma = 1$.

a) Write down the first-order conditions for the UMP and derive the consumer's Walrasian demand and indirect utility functions.
b) Verify their properties.

Now consider the EMP using the above utility

(i) Derive the Hicksian demand and expenditure functions. Check their properties.
(ii) Show that $h(p,u) = \nabla_p e(p,u)$.
(iii) Verify that the Slutsky equation holds.
(iv) Verify that the own-substitution terms are negative and that cross-price effects are symmetric.
(v) Show that the Slutsky matrix $S(p,w)$ is negative semi-definite.

10.(*) Υποθέσατε ότι οι προτιμήσεις των καταναλωτών μπορούν να αντιπροσωπευθούν από την οιονεί-γραμμική συνάρτηση χρησιμότητας:

$$u = f(x_1) + x_2 \qquad f' > 0, \quad f'' < 0$$

(i) Δείξτε ότι οι καμπύλες αδιαφορίας του καταναλωτή είναι κάθετα παράλληλες, δηλ. η κλίση τους εξαρτάται μόνο από το $x_1$ και όχι από το $x_2$.
(ii) Λύστε το πρόβλημα μεγιστοποίησης ωφέλειας του καταναλωτή και βρείτε τις Μαρσαλιανές συναρτήσεις ζήτησης.
(iii) Δείξτε ότι η ελαστικότητα ζήτησης ως προς το εισόδημα του αγαθού 1 είναι μηδέν.

Τι συνεπάγεται αυτό για τη Μαρσαλιανή και Χικσιανή συνάρτηση ζήτησης του αγαθού 1;

(iv) Δείξτε ότι η οριακή χρησιμότητα του εισοδήματος είναι ανεξάρτητη του $p_1$ έτσι ώστε η μεταβολή στο (Μαρσαλιανό) πλεόνασμα καταναλωτού μετρά την αλλαγή στην ωφέλεια η οποία προκαλείται από αλλαγές στο $p_1$.

11.(*) Η συνάρτηση χρησιμότητας είναι

$$u(x_1, x_2) = \min\{x_2 + 2x_1, x_1 + 2x_2\}$$

(i) Σχεδιάστε την καμπύλη αδιαφορίας για $u(x_1, x_2) = 20$. Σκιάσατε τη περιοχή . $u(x_1, x_2) \geq 20$.

(ii) Για ποιές τιμές του λόγου $p_1/p_2$ θα έχουμε ένα μοναδικό βέλτιστο στο $x_1 = 0$;

(iii) Στο $x_2 = 0$;

(iv) Εαν ούτε το $x_1$ ούτε το $x_2$ ισούνται με μηδέν και το βέλτιστο είναι μοναδικό ποιά πρέπει να είναι η τιμή του λόγου $x_1/x_2$;

12.(**) Suppose that $u(x)$ is differentiable and strictly quasi concave and that the Walrasian demand function $x(p, w)$ is differentiable. Show the following:

a) If $u(x)$ is homogeneous of degree 1, then the Walrasian demand function $x(p, w)$ and the indirect utility function $v(p, w)$ are homogeneous of degree one in $w$ and the wealth expansion path is a straight line through the origin. What does this imply about the wealth elasticity of demand, $\varepsilon_{i,w}(p, w)$? Can you say something about $D_w x(p, w)$?

b) If $u(x)$ is strictly quasi concave and $v(p, w)$ is homogeneous of degree 1 in $w$, then $u(x)$ must be homogeneous of degree 1.

13.(*) Suppose that consumer's preferences are homothetic. Show that:

$$\partial x_i(p, M)/\partial p_j = \partial x_j(p, M)/\partial p_i$$

where $x_i(p, M)$ is the Walrasian demand function for good $i = 1, ..., n$.

14.(**) Suppose that $x(p, w)$ is a demand function which is homogeneous of degree 1 with respect to $w$ and satisfies Walras' law and homogeneity of degree zero. Suppose also that all the cross-price effects are zero, that is $\frac{\partial x_l(p,w)}{\partial p_k} = 0$, whenever $k \neq l$. Show that this implies that for every $l$, $x_l(p,w) = a_l \frac{w}{p_l}$, where $a_l > 0$ is a constant independent of $(p,w)$.

15.(*) Ο καταναλωτής 1 έχει συνάρτηση δαπανών $e_1(p_1,p_2,u_1)=u_1\sqrt{p_1,p_2}$ και ο καταναλωτής 2 έχει συνάρτηση χρησιμότητας $u_2(x_1,x_2)=43x_1^3x_2^\alpha$. Ποιές είναι οι Μαρσαλιανές συναρτήσεις ζήτησης για κάθε ένα από τα δύο αγαθά από κάθε καταναλωτή; (Υποδηλώστε το εισόδημα του καταναλωτή $i$ με $M_i$).

16.(**) Show that if $u(x)$ is homogeneous of degree 1, then $h(p,u)$ and $e(p,u)$ are homogeneous of degree 1 in $u$.

17.(*) Here are two expenditure minimization problems in which you are not supposed to take derivatives. Use your intuition and graphical methods.

$$\min_{x_1,x_2} p_1x_1 + p_2x_2$$
$$\text{s.t } u(x_1,x_2) = \bar{u}$$

A. Assume $u(x) = \min\{x_1, x_2\}$

- (i) What is the solution for the Hicksian compensated demand functions? (do not write the Lagrangean)
- (ii) Show that the Hicksian compensated demand function does not depend on $p$.

B. Assume $u(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$. What is the solution for the Hicksian compensated demand functions? (do not write the Lagrangean).

18.(**) Θεωρείστε τα προβλήματα:

$$\max u(x) \qquad\qquad \min px$$
$$\text{( I )} \qquad\qquad \text{( II )}$$
$$s.t \quad px = M \qquad\qquad s.t \quad \mathrm{u}(x) = u$$

όπου η $u(.)$ είναι μία αυστηρά οιονεί-κοίλη συνάρτηση χρησιμότητας και $p$ είναι το ίδιο διάνυσμα τιμών και στις δύο περιπτώσεις. Με δεδομένο $M$, καλέστε $u^*$ τη βέλτιστη ωφέλεια στο πρώτο πρόβλημα με $x_1^*$, $\forall i$. Μετά, θέσατε $u^*$ στον περιορισμό του δεύτερου προβλήματος.

Δείξτε:

(i) Η λύση του δευτέρου προβλήματος είναι ταυτόσημη με αυτή του πρώτου.

(ii) $\lambda^* = \dfrac{1}{\mu^*}$, όπου $\lambda^*$ και $\mu^*$ είναι οι βέλτιστες τιμές των πολλαπλασιαστών Langrange στο πρώτο και δεύτερο πρόβλημα αντίστοιχα.

(iii) Τα ανωτέρω αποτελέσματα εξακολουθούν να ισχύουν για κάθε θετικό μονοτονικό μετασχηματισμό της $u(.)$.

19.(**) Υποθέστε ότι οι προτιμήσεις αντιπροσωπεύονται από $u = \varphi(x)$ και ότι υπολογίζονται οι συναρτήσεις ζήτησης, έμμεσης ωφέλειας και εξόδων. Εαν τώρα οι ίδιες προτιμήσεις αντιπροσωπεύονται από $u^* = \psi(\varphi(x))$, όπου $\psi(.)$ είναι μία μονοτονικά αύξουσα συνάρτηση, δείξτε ότι η $e(p,u)$ αντικαθίσταται από την $e(p,\psi^{-1}(u^*))$, η $v(p,M)$ από την $\psi(v(p,M))$ και η $h(p,u)$ από την $h(p,\psi^{-1}(u^*))$. Επίσης, δείξτε ότι οι Μαρσαλιανές συναρτήσεις ζήτησης $x(p,M)$ δεν μεταβάλλονται.

20.(**) Prove that Roy's identity is implied by the identity $v(p,e(p,u)) = u$ and the result $h(p,u) = \nabla_p e(p,u)$.

Prove now that $h(p,u) = \nabla_p e(p,u)$ is implied by Roy's identity.

21.(*) Show that for all $(p,w)$: $w\dfrac{\partial v(p,w)}{\partial w} = -p\nabla_p v(p,w)$.

22.(*) Δείξτε ότι οι Χικσιανές συναρτήσεις ζήτησης ικανοποιούν τη σχέση:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h_i(p,u)}{\partial p_j} p_j = 0$$

23.(*)

(i) Δείξτε ότι οι Μαρσαλιανές συναρτήσεις ζήτησης ικανοποιούν τους εξής περιορισμούς:

Άθροισμα Cournot: $\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i(p,M)}{\partial p_j} + x_j(p,M) = 0 \qquad j = 1,2,\ldots n$

Άθροισμα Engel: $\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i(p,M)}{\partial M} = 1$

(ii) Εκφράστε τους ανωτέρω περιορισμούς υπό τη μορφή των ελαστικοτήτων $e_{ij} = (\partial x_i/\partial p_j)(p_j/x_i), \quad n_i = (\partial x_i/\partial M)(M/x_i) \;\; \kappa\alpha\iota \;\; s_i = p_i x_i / M$

(iii) Δείξτε ότι η ομογένεια των Μαρσαλιανών συναρτήσεων ζήτησης συνεπάγεται:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial x_i(p,M)}{\partial p_j} + M \frac{\partial x_i(p,M)}{\partial M} = 0$$

και ότι αυτό μπορεί να εκφρασθεί ως:

$$\sum_{i=1}^{n} e_{ij} + n_i = 0$$

(iv) Δείξτε ότι εάν ένα σύνολο Μαρσαλιανών συναρτήσεων ζήτησης ικανοποιεί ομογένεια, συμμετρία και άθροισμα Engel, τότε ικανοποιεί και το άθροισμα Cournot.

24.(*) The matrix below records the Slutsky matrix at the prices $p_1 = 1, p_2 = 2$ and $p_3 = 6$:

$$\begin{pmatrix} -10 & a & b \\ c & -4 & d \\ 3 & e & f \end{pmatrix}$$

Find $a, b, c, d, e, f$. Does the resulting matrix possess all the properties of the Slutsky matrix?

25.(*) Δύο αγαθά $i$ και $j$ καλούνται συμπληρωματικά κατά Hicks εάν $\partial h_i(p,u)/\partial p_j < 0$ και υποκατάστατα κατά Hicks εάν $\partial h_i(p,u)/\partial p_j > 0$. Δώστε τις ακριβείς συνθήκες υπό τις οποίες θα μπορούσαμε να καλέσουμε δύο αγαθά συμπληρωματικά ή υποκατάστατα με βάση τις Μαρσαλιανές συναρτήσεις ζήτησης.